Секция: ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ

УДК 517.911.5

АПРИОРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ И ОЦЕНКИ ИХ РЕШЕНИЙ

© А.И. Булгаков, А.И. Коробко, О.В. Филиппова

Для функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями в конечном числе фиксированных точек сформулированы условия, при которых множество решений задачи Коши почти реализует и реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений. На основе этого результата приведены оценки решений задачи Коши. Рассмотрены примеры, из которых следует, что общее утверждение об оценках решений содержат в себе классические результаты А.Ф. Филиппова, В.И. Благодатских.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение, импульсные воздействия, априорная ограниченность, задача Коши.

В работе сформулированы теоремы, которые показывают, что если множество всех локальных решений задачи (1)-(3) (см. ниже) априорно ограничено, то множество решений задачи (1)-(3) почти реализует (или реализует) расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений (определение смотри ниже). На основе этого утверждения получены оценки решений задачи (1)-(3), аналогичные оценкам А. Ф. Филиппова для обыкновенных дифференциальных включений. Рассмотрены примеры обыкновенного дифференциального включения с импульсными воздействиями и дифференциального включения с запаздыванием, в которых получены конкретные оценки решений. Отметим, что дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями исследованы в монографиях [1 – 4].

Пусть $\mathcal{U} \in [a,b]$ – измеримое по Лебегу множество. Обозначим $\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x : U \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$.

Пусть $\Phi \subset \mathbf{L}_1^n[a,b]$. Будем говорить, что множество Φ *выпукло по переключению* (*разложимо*), если для любых $x, y \in \Phi$ и любого измеримого множества $e \subset [a,b]$ выполняется включение $\chi_{(e)}x + \chi_{([a,b]\setminus e)}y \in \Phi$, где $\chi_{(\cdot)}$ – характеристическая функция соответствующих множеств. Множество всех ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}_1^n[a,b]$ обозначим через $S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$. Через $\Omega(S(\mathbf{L}_1^n[a,b]))$ обозначим множество всех выпуклых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}_1^n[a,b]$.

Пусть $t_k \in [a,b]$ $(a < t_1 < \ldots < t_m < b)$ – конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ ограниченных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = 1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$, $\widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b]$ – множество неотрицательных функций пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^1[a,b]$. Если $\tau \in (a,b]$, то $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ – это пространство функций $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$, являющихся сужениями на отрезок $[a,\tau]$ элементов из $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ с нормой$\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,\tau]\}$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi(x), \tag{1}$$

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)),\ k = 1,\ldots,m, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

где полунепрерывное снизу отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ...m$ непрерывны, $\Delta x(t_k) = x(t_k+0) - x(t_k)$, $k = 1, 2, ...m$.

О п р е д е л е н и е 1. *Под решением задачи* (1)-(3) будем понимать функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, для которой существует такое $q \in \Phi(x)$, что при всех $t \in [a, b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^{m} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{4}$$

где $\Delta(x(t_k))$, $k = 1, ...m$ удовлетворяют равенствам (2), $\chi_{(c,d]}(\cdot)$ — характеристическая функция полуинтервала $(c, d]$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить (см. [4]), что оператор Φ *вольтерров по А.Н. Тихонову* (или *вольтерров*), если из условия $x|_\tau = y|_\tau$, $\tau \in (a, b)$, следует равенство $(\Phi(x))|_\tau = (\Phi(y))|_\tau$, где $z|_\tau-$ сужение функции $z \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ на отрезок $[a, \tau]$, $(\Phi(z))|_\tau-$ множество сужений функций из множества $\Phi(z)$ на отрезок $[a, \tau]$.

Далее предположим, что оператор $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a, b])$ (правая часть включения (1)) вольтерров.

Пусть $\tau \in (a, b]$. Определим непрерывное отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ равенством

$$(V_\tau(x))(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad t \in [a, \tau]; \\ x(\tau), & \text{если} \quad t \in (\tau, b]. \end{cases} \tag{5}$$

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau]$ является *решением задачи* (1)-(3) *на отрезке* $[a, \tau]$, $\tau \in (a, b]$, если существует такое $q \in (\Phi(V_\tau(x)))|_\tau$, что функция $x : [a, \tau] \to \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k: t_k \in [a,\tau]} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{6}$$

где отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ определено равенством (5).

Далее, будем говорить, что функция $x : [a, c) \to \mathbb{R}^n$ является *решением задачи* (1)-(3) *на* $[a, c)$, если для любого $\tau \in (a, c)$ сужение $x|_\tau \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau]$, и найдется такая функция $q : [a, c) \to \mathbb{R}^n$, что для любого $\tau \in [a, c)$ $q|_\tau \in (\Phi(V_\tau(x)))|_\tau$, и для любого $t \in [a, c)$ имеет место равенство (6), где $t_k \in [a, c)$.

Решение $x : [a, c) \to \mathbb{R}^n$ задачи (1)-(3) будем называть *непродолжаемым*, если не существует такого решения y задачи (1)-(3) на $[a, \tau]$, (здесь $\tau \in (c, b]$, если $c < b$ и $\tau = b$, если $c = b$), что для любого $t \in [a, c)$ выполнено равенство $x(t) = y(t)$.

Решение задачи (1)-(3) считается *непродолжаемым.*

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что множество решений задачи (1)-(3) *почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений*, если для любого $v \in \mathbf{L}_1^n[a, b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое решение $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ задачи (1)-(3), что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется неравенство

$$\|q - v\|_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})} \leqslant \rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[v, \Phi(x)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}), \tag{7}$$

где функция $q \in \Phi(x)$ удовлетворяет равенству (4). Если неравенство (7) выполняется и при $\varepsilon = 0$, то будем говорить, что множество решений задачи (1)-(3) *реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений.*

Т е о р е м а 1. *Пусть множество всех локальных решений задачи* (1)-(3) *априорно ограничено. И пусть отображение* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a, b])$ *непрерывно по Хаусдорфу. Тогда множество решений задачи* (1)-(3) *почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений. Если* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \Omega(S(\mathbf{L}_1^n[a, b]))$, *то множество решений задачи* (1)-(3) *реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений.*

О п р е д е л е н и е 5. Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, *обладают свойством* $\mathcal{A}$, если для каждого $k = 1, 2, ..., m$ найдется непрерывная неубывающая функция $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}_+^1 \to \mathbb{R}_+^1$, удовлетворяющая равенству $\widetilde{I}_k(0) = 0$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leq \widetilde{I}_k(|x - y|). \tag{8}$$

О п р е д е л е н и е 6. Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, и отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a, b])$ *обладают свойством* $(\Gamma^{u,\varepsilon,p}, k = 1, 2, ..., m)$, если импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, обладают свойством $\mathcal{A}$, и если найдется изотонный непрерывный вольтерров оператор $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a, b] \to \mathbf{L}_+^1[a, b]$, удовлетворяющий условиям $\Gamma(0) = 0$, что для любых функций $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\Phi(x); \Phi(y)] \leq \|\Gamma(Z(x-y))\|_{\mathbf{L}_1^1(\mathcal{U})}; \tag{9}$$

множество всех локальных решений задачи

$$\dot{y} = u + \varepsilon + \Gamma(y), \quad \Delta(y(t_k)) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1, ...m, \quad y(a) = p \tag{10}$$

априорно ограничено. Здесь непрерывное отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b]$ определено равенством

$$(Zx)(t) = |x(t)|, \tag{11}$$

отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, удовлетворяют неравенству (8), $u \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$, числа $\varepsilon, p \geq 0$.

Пусть для функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существует функция $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a,b]$, что для любого $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$y(t) = y(a) + \int\limits_a^t \widetilde{q}(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k,b]}(t)\Delta(y(t_k)), \tag{12}$$

где $\Delta(y(t_k))$, $k = 1, 2, ..., m$, удовлетворяет равенству (2). Пусть для функции $\varkappa \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U}$ справедливо соотношение

$$\rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q}; \Phi(y)] \leq \int\limits_{\mathcal{U}} \varkappa(s)ds, \tag{13}$$

где функции $\widetilde{q} \in \mathbf{L}_1^n[a,b]$ и $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ удовлетворяют равенству (12).

Т е о р е м а 2. *Пусть для функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ имеет место представление* (12), *а функция $\varkappa \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству* (13). *Далее, пусть импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, и отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ обладают свойством* ($\Gamma^{u,\varepsilon,p}, k = 1, 2, ..., m$), *где $\varepsilon \geq 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0- начальное условие задачи* (1)-(3). *Тогда для любого решения $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ задачи* (1)-(3), *удовлетворяющего для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ неравенству* (7), *в котором функция $q \in \mathbf{L}_1^n[a,b]$ из представления* (4), *а функция $v = \widetilde{q}$ из соотношения* (12), *при любом $t \in [a,b]$ имеет место оценка*

$$|x(t) - y(t)| \leq \xi(\varkappa, \varepsilon, p)(t) \tag{14}$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо соотношение

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \leq \varkappa(t) + \varepsilon + (\Gamma(\xi(\varkappa, \varepsilon, p)))(t), \tag{15}$$

где $\xi(\varkappa, \varepsilon, p)-$ верхнее решение задачи (10) *при $u = \varkappa$ и $p = |x_0 - y(a)|$.*

Из теорем 1, 2 вытекает

Т е о р е м а 3. *Пусть для функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ имеет место представление* (12) *и функция $\varkappa \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству* (13). *Далее, пусть импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m$, и отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}^n_1[a,b])$ обладают свойством $(\Gamma^{u,\varepsilon,p}, k = 1,2,...,m)$, где $\varepsilon \geq 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0- начальное условие задачи* (1)-(3), *и множество всех локальных решений задачи* (1)-(3) *априорно ограниченно. Тогда при $\varepsilon > 0$ существует решение $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ задачи* (1)-(3), *для которого при всех $t \in [a,b]$ справедлива оценка* (14), *и при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется соотношение* (15).

Если $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega[S(\mathbf{L}^n_1[a,b])]$, то утверждение справедливо и при $\varepsilon = 0$.

Далее рассмотрим задачи, для которых можно получить из теоремы 3 конкретные оценки решений.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального включения с импульсными воздействиями

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \text{ при почти всех } \ t \in [a,b], \tag{16}$$

$$\Delta(x(t_k)) = \widehat{I}_k(x(t_k)), \quad k = 1,2,...,m, \tag{17}$$

$$x(a) = x_0, \tag{18}$$

где для любого $k = 1,2,...,m$ отображение $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определено равенством

$$\widehat{I}_k x = A_k x + g_k,$$

здесь $A_k \in M_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$, $g_k \in \mathbb{R}^n$; отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям:

1) при всех $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot, x)$ измеримо;

2) существует суммируемая функция $l : [a,b] \to [0,\infty)$ такая, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$h[F(t,x); F(t,y)] \leq l(t)|x - y|; \tag{19}$$

3) функция $\|F(t,0)\| : [a,b] \to [0,\infty)$, определенная равенством

$$\|F(t,0)\| = \sup_{y \in F(t,0)} |y|,$$

суммируемая.

Под решением задачи (16)-(18) понимается функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такая суммируемая $q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, что при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо включение $q(t) \in F(t, x(t))$ и при всех $t \in [a,b]$ имеет место равенство

$$x(t) = (\Lambda q)(t) + \sum_{k=1}^{m} \Delta(x(t_k)), \tag{20}$$

где $\Delta(x(t_k))$, $k = 1, 2, ..., m$ удовлетворяют равенству (17), а оператор $\Lambda : \mathbf{L}_1^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ определен равенством

$$(\Lambda z)(t) = x_0 + \int_a^t z(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

Отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ порождает оператор Немыцкого $N : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$, определенный равенством

$$Nx = \{z \in \mathbf{L}_1^n[a,b] : z(t) \in F(t, x(t)) \text{ при почти всех } t \in [a,b]\}. \tag{21}$$

С помощью оператора Немыцкого включение (16) можно записать в следующем эквивалентном функциональном виде

$$\dot{x} \in Nx, \tag{22}$$

где $\dot{x}-$"производная решения"$x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ задачи (1)-(3) (функция $q \in \mathbf{L}_1^n[a,b]$ удовлетворяет равенству (20)).

Так как для любого $k = 1, 2, ..., m$, выполняется неравенство

$$|\widehat{I}_k x - \widehat{I}_k y| \le \|A_k\| |x - y|,$$

то отображение $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}_+^1 \to \mathbb{R}_+^1$, $k = 1, 2, ..., m$, удовлетворяющее оценке (8), имеет вид

$$\widetilde{I}_k x = \|A_k\| x. \tag{23}$$

Импульсные воздействия $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, и отображение $N : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ обладают свойством $(\Gamma^{u,\varepsilon,p}, \widehat{I}_k, k = 1, 2, ..., m)$ при $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b] \to \mathbf{L}_+^1[a,b]$, заданном равенством

$$(\Gamma x)(t) = l(t)x(t). \tag{24}$$

При этом $\Gamma:\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]\to\mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет условиям: $\Gamma(0)=0$, для любых функций $x,y\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U}\subset[a,b]$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbf{L}^n_1(\mathcal{U})}[Nx;Ny]\leq\|\Gamma(Z(x-y))\|_{\mathbf{L}^1_1(\mathcal{U})},$$

здесь непрерывное отображение $Z:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\to\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ определено равенством (11).

Найдем решение задачи

$$\dot y=u+\varepsilon+\Gamma(y),\quad \Delta y(t_k)=\widetilde{I}_k(y(t_k)),\quad k=1,2,...m,\quad y(a)=p, \tag{25}$$

где числа $\varepsilon,p\geq0$, функция $u\in\mathbf{L}^1_+[a,b]$, отображение $\Gamma:\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]\to\mathbf{L}^1_+[a,b]$ определено равенством (24). Решение задачи (25) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\xi(u,\varepsilon,p)(t)=\int_a^t(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^t l(\tau)d\tau}ds+p\;e^{\int_a^t l(s)ds}+\\
&+\sum_{k=1}^m\|A_k\|\left(\int_a^{t_k}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_k} l(\tau)d\tau}ds+p\;e^{\int_a^{t_k} l(s)ds}\right)e^{\int_{t_k}^t l(s)ds}\chi_{(t_k,b]}(t)+\\
&+\sum_{k=1}^{m-1}\|A_1\|\|A_{k+1}\|\left(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\;e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\right)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_{k+1},b]}(t)+\\
&+\sum_{k=2}^{m-2}\|A_2\|\|A_{k+1}\|\left(\int_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_2} l(\tau)d\tau}ds+p\;e^{\int_a^{t_2} l(s)ds}\right)e^{\int_{t_2}^t l(s)ds}\chi_{(t_{k+1},b]}(t)+\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\|A_{m-1}\|\|A_m\|\left(\int_a^{t_{m-1}}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_{m-1}} l(\tau)d\tau}ds+p\;e^{\int_a^{t_{m-1}} l(s)ds}\right)e^{\int_{t_{m-1}}^t l(s)ds}\chi_{(t_m,b]}(t)+\\
&+\sum_{k=1}^{m-2}\|A_1\|\|A_2\|\|A_{k+2}\|\left(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\;e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\right)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_{k+2},b]}(t)+\\
&+\sum_{k=1}^{m-3}\|A_2\|\|A_3\|\|A_{k+3}\|\left(\int_a^{t_2}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_2} l(\tau)d\tau}ds+p\;e^{\int_a^{t_2} l(s)ds}\right)e^{\int_{t_2}^t l(s)ds}\chi_{(t_{k+3},b]}(t)+\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\|A_{m-2}\|\|A_{m-1}\|\|A_m\|\left(\int_a^{t_{m-2}}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_{m-2}} l(\tau)d\tau}ds+p\,e^{\int_a^{t_{m-2}} l(s)ds}\right)e^{\int_{t_{m-2}}^t l(s)ds}\chi_{(t_m,b]}(t)+\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\|A_1\|\|A_2\|\ldots\|A_m\|\left(\int_a^{t_1}(u(s)+\varepsilon)e^{\int_s^{t_1} l(\tau)d\tau}ds+p\;e^{\int_a^{t_1} l(s)ds}\right)e^{\int_{t_1}^t l(s)ds}\chi_{(t_m,b]}(t).
\end{aligned}\tag{26}$$

Пусть для функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существует такая функция $\widetilde{q} \in \mathbf{L}_1^n[a,b]$, что при любом $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$y(t) = y(a) + \int\limits_a^t \widetilde{q}(s)ds + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,b]}(t)\Delta(y(t_k)), \tag{27}$$

где $\Delta(y(t_k))$, $k = 1,2,\ldots,m$ удовлетворяют равенству (17). Далее, пусть функция $\varkappa \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$ удовлетворяет при почти всех $t \in [a,b]$ оценке

$$\rho[\widetilde{q}(t), F(t,y(t))] \leqslant \varkappa(t). \tag{28}$$

Тогда из теоремы 3 и из приведенных выше рассуждений вытекает, что для любой функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, удовлетворяющей представлению (27) и оценке (28), и любого $\varepsilon < 0$ существует такое решение x задачи (16)-(18), что для любого $t \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|x(t) - y(t)| \leq \xi(\varkappa,\varepsilon,p)(t) \tag{29}$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо соотношение

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \leq \varkappa(t) + \varepsilon + l(t)\xi(\varkappa,\varepsilon,p)(t), \tag{30}$$

где функция $\varkappa \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$ удовлетворяет оценке (28), функция $l \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$ из неравенства Липшица (19) для отображения $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\xi(\varkappa,\varepsilon,p) \in \widetilde{\mathbf{C}}_+[a,b]$ определена равенством (26) при $u = \varkappa$ и $p = |x_0 - y(a)|$. Отметим, что если импульсные воздействия отсутствуют, то приведенные оценки (29), (30) совпадают с оценками А.Ф. Филиппова не только для обыкновенных дифференциальных включений, но и для других типов включений, например, для дифференциальных включений с запаздыванием.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения с запаздыванием

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) \in F(t, x[v(t)]), \quad \text{при почти всех} \;\; t \in [a,b], \\ &x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \text{если} \;\; \xi < a, \end{aligned} \tag{31}$$

где измеримая по Лебегу функция $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ при всех $t \in [a,b]$ удовлетворяет неравенству $v(t) \leqslant t$; ограниченная функция $\varphi : (-\infty, a) \to \mathbb{R}^n$ измерима по Борелю; отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и импульсные воздействия $\widehat{I}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $k = 1,2,\ldots,m$, удовлетворяют условиям, описанным в примере 1.

Определим оператор $P : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}_\infty[a,b]$ равенством

$$(Px)(t) = \begin{cases} x[v(t)], & \text{если} \quad v(t) \in [a,b]; \\ \varphi[v(t)], & \text{если} \quad v(t) < a. \end{cases} \tag{32}$$

Под решением задачи (31), (17), (18) понимается функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такая суммируемая $q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, что при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо включение $q(t) \in N(Px)(t)$ и при всех $t \in [a,b]$ выполняется равенство (20), где $N : \mathbf{L}_\infty[a,b] \to S(\mathbf{L}^n[a,b])$ – оператор Немыцкого, порожденный отображением $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ (см. (21)).

Определим отображение $\widetilde{\Gamma} : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ равенством

$$(\widetilde{\Gamma}x)(t) = l(t)(\Theta x)(t), \tag{33}$$

где функция $l \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет условию Липшица (19) для отображения $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, отображение $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ задано равенством

$$(\Theta x)(t) = \sup_{s \in [a,t]} x(s). \tag{34}$$

Далее, зададим отображение $\widetilde{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_\infty[a,b]$ формулой

$$(\widetilde{P}x)(t) = \begin{cases} x[v(t)], & \text{если} \quad v(t) \in [a,b]; \\ 0, & \text{если} \quad v(t) < a, \end{cases} \tag{35}$$

где измеримая по Лебегу функция $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ описана выше.

Для любых $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ справедливы соотношения

$$h_{L^n(\mathcal{U})}[NPx;\ NPy] \leqslant ||\Gamma\widetilde{P}(Z(x-y))||_{L^1(\mathcal{U})} \leqslant ||\widetilde{\Gamma}(Z(x-y))||_{L^1(\mathcal{U})}, \tag{36}$$

здесь непрерывное отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ определено равенством (11).

Пусть функция $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, определенная при любом $t \in [a,b]$ представлением (27), при почти всех $t \in [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho[\widetilde{q}(t), F(t,(Py)(t))] \leqslant \varkappa_1(t), \tag{37}$$

где отображение $P : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathbf{L}_\infty[a,b]$ задано равенством (32), функция $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n_1[a,b]$ из соотношения (27), $\varkappa_1 \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$.

Для задачи (31), (17), (18), в силу неравенств (36), можно найти мажорантную оценку.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\dot{y}(t) = \varkappa_1(t) + \varepsilon + l(t)(\Theta y)(t), \quad \Delta y(t_k) = \widetilde{I}_k(y(t_k)),\\ k = 1, 2, \ldots, m, \quad y(a) = p,\end{gathered} \tag{38}$$

где отображение $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ задано формулой (34), а импульсные воздействия $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, $k = 1, 2, ..., m$, имеют вид (23), функция $\varkappa_1 \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет оценке (37).

Решение задачи (38) при любом $t \in [a,b]$ определяется формулой

$$y(t) = p + \int\limits_a^t (\varkappa_1(s) + \varepsilon) ds + \int\limits_a^t l(s)(\Theta y)(s) ds + \sum_{k=1}^m \Delta(y(t_k)) \chi_{[t_k,b)}(t). \tag{39}$$

Так как при любом $k = 1, 2, \ldots, m$ имеет место неравенство $\Delta(y(t_k)) \leqslant \Delta((\Theta y)(t_k))$, а правая часть равенства (39) не убывает, то из определения отображения $\Theta : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ (см. (34)) при любом $t \in [a,b]$ вытекает оценка

$$(\Theta y)(t) \leqslant p + \int\limits_a^t (\varkappa_1(s) + \varepsilon) ds + \int\limits_a^t l(s)(\Theta y)(s) ds + \sum_{k=1}^m \Delta((\Theta y)(t_k)) \chi_{[t_k,b)}(t). \tag{40}$$

Из оценки (40) и теоремы 2 следует, что значение $(\Theta y)(t)$ при любом $t \in [a,b]$ не превосходит решения задачи

$$\dot{y} = \varkappa_1 + \varepsilon + ly, \quad \Delta(y(t_k)) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad y(a) = p, \tag{41}$$

Решение задачи (41) найдено в примере 1, является функцией $\xi(\varkappa_1, \varepsilon, p)(\cdot)$ и определено равенством (26).

Таким образом, из теоремы 3 и приведенных примере 2 рассуждений вытекает, что для любой функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, удовлетворяющей представлению (27) и оценке (37), для любого $t \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|x(t) - y(t)| \leq \xi(\varkappa_1, \varepsilon, p)(t) \tag{42}$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо соотношение

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \leq \varkappa_1(t) + \varepsilon + l(t)\xi(\varkappa_1, \varepsilon, p)(t), \tag{43}$$

где функция $\varkappa_1 \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет оценке (37), функция $l \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ из неравенства Липшица (19) отображения $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\xi(\varkappa, \varepsilon, p) \in \widetilde{\mathbf{C}}_+[a,b]$ определена равенством (26) при $u = \varkappa_1$ и $p = |x_0 - y(a)|$. Отметим также, что если $v(t) = t$, то приведенные оценки (42), (43) совпадают с оценками, приведенными в примере 1 и в регулярном случае (без импульсных воздействий), с точностью до произвольного $\varepsilon > 0$, совпадают с оценками А.Ф. Филиппова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. К.: Вища шк., 1987.

2. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1987.

4. *Тихонов А.Н.* Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 68. № 4. С. 1-25.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 07-01-00305, темплана 1.6.07, Норвежской Национальной Программы Научных Исследований FUGE при Совете научных исследований Норвегии и Норвежского Комитета по развитию университетской науки и образования (NUFU), грант PRO 06/02.

Поступила в редакцию 10 ноября 2008 г.

For a functional-differential inclusion with impulses in a finite number of points there are formulated the conditions under which the solutions set to the Cauchy problem quasi-realizes or realizes the distance, in the space of summable functions, from any summable function to its values. Based on this result, the estimations of solutions to the Cauchy problem are derived. There are considered the examples which show that the general statements on solutions estimations cover the classical results due to A.F. Filippov and V.I. Blagodatskich.

Key words: functional-differential inclusion, impulses, a-priori boundness, Cauchy problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* The differential equations with impulses. K.: High.school, 1987.

2. *Zavalischin S.T., Sesekin A.N.* Impulse processes. Models and applications. M.: Science, 1991.

3. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rahmatullina L.F.* Elements of theory of functional-differential equations. M.: High.school, 1987.

4. *Тихонов А.Н. Tichonov A.N.* On functional equations of Volterra type and it's applications to some problems of mathematical physics // Bulletin of Moscow University. Section A. 1938. № 8. V. 1. p. 1-25.

УДК 517.911/517.929

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ГЛОБАЛЬНЫХ И ПРЕДЕЛЬНО ПРОДОЛЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

© Е.О. Бурлаков

Предлагаются утверждения о непрерывной зависимости от параметров решений функционально-дифференциальных уравнений. Полученные результаты позволяют проверять корректность моделей, представимых дифференциальными уравнениями с запаздыванием. Доказательства опираются на результаты работы [1].

Ключевые слова: управляемые системы с запаздыванием, непрерывная зависимость решений от параметров, локальная разрешимость задачи Коши, продолжение решений.